Laboratoire d'Informatique Fondamentale, de Recherche Opérationnelle, de Combinatoire et d'Économétrie

Availaible on line at http://www.liforce.usthb.dz

bulletin-liforce@usthb.dz

Bulletin du Laboratoire 03 (2016) 38 - 41

Amélioration d'une congruence de Glaisher

Scheherazade ZERROUKHAT[1], **Redha CHELLAL**[2], **Farid BENCHERIF**[3]

[1,2,3] USTHB, Faculty of Mathematics,
P.B. 32 El-Alia, 16111, Bab Ezzouar, Algiers, Algeria.

szerroukhat@yahoo.fr,
chellal.redha@gmail.com,
fbencherif@gmail.com

Résumé : Dans ce travail, nous prouvons que si $p \geq 5$ est un nombre premier, alors

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k}\right) \pmod{p^2}\cdot$$

Mots clés : Congruences, nombres harmoniques.

1 Introduction

Pour tout nombre premier p impair et pour tout entier a premier avec p, le quotient de Fermat en base a est défini par :

$$q_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}.$$

L'étude des quotients de Fermat et notamment des congruences concernant ces quotients est en relation avec l'étude classique du grand théorème de Fermat [3]. La congruence suivante est due to Glaisher [1] :

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k}\right) \pmod{p}.$$

En faisant de nombreux essais numériques, B. Ronk [4, 5] a constaté que cette congruence était vérifiée modulo p^2 pour tout nombre premier $p \leq 1000$. Il a conjecturé que cette congruence était vérifiée modulo p^2 pour tout nombre premier p. Dans ce papier, nous confirmons cette conjecture. Nous améliorons ainsi la congruence de Glaisher en prouvant le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$, on a :*

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k}\right) \pmod{p^2}.$$

2 Démonstration du théorème

La preuve du théorème repose sur les lemmes qui suivent :

Lemme 2.1 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preuve. Ce lemme est prouvé dans [6]. ■

Lemme 2.2 *Pour tout nombre premier p impair, on a :*

$$H_{p-k} \equiv H_{k-1} \pmod{p}.$$

Preuve. Ce lemme est aussi prouvé dans [6]. ■

Lemme 2.3 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{p-2} \frac{2^k H_k}{k+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p-2} \frac{2^k H_k}{k+1} &= \sum_{k=2}^{p-1} \frac{2^{p-k} H_{p-k}}{p-k+1} \\
&\equiv \sum_{k=2}^{p-1} \frac{2^{p-1-(k-1)} H_{p-k}}{p-(k-1)} \\
&\equiv -\sum_{k=2}^{p-1} \frac{H_{k-1}}{(k-1)2^{k-1}} \\
&\equiv -\sum_{k=1}^{p-2} \frac{H_k}{k2^k} \\
&\equiv -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} + \frac{H_{p-1}}{(p-1)2^{p-1}} \\
&\equiv 0 \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Ce qui falait démontré. ■

Lemme 2.4 *On a :*

$$\frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} \equiv -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^{k+1}}{k+1} + p \sum_{k=1}^{p-2} H_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \pmod{p^2}\cdot$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} &= -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k (-1)^{p-k} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \binom{p-1}{k-1} \frac{x^k}{k} \\
&= -\sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \binom{p-1}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.
\end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
(-1)^k \binom{p-1}{k} &= \frac{(1-p)(2-p)\dots(k-p)}{1.2.\dots.k} \\
&= \left(1-\frac{p}{1}\right)\left(1-\frac{p}{2}\right)\dots\left(1-\frac{p}{k}\right) \\
&\equiv 1 - p\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \pmod{p^2}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\frac{x^p-(x-1)^p-1}{p} &\equiv -\sum_{k=0}^{p-2} (1-pH_k)\,\frac{x^{k+1}}{k+1} \ (\mathrm{mod} p^2). \\
&\equiv -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^{k+1}}{k+1} + p\sum_{k=1}^{p-2} H_k\,\frac{x^{k+1}}{k+1} \ (\mathrm{mod} p^2).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

La preuve du théorème est alors immédiate, il suffit de remplacer x par 2, ce qui donne :

$$\frac{2^p-2}{p} \equiv -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{2^{k+1}}{k+1} + p\sum_{k=1}^{p-2} H_k\,\frac{2^{k+1}}{k+1} \ (\mathrm{mod} p^2).$$

D'où

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-2} \frac{2^{k+1}}{k+1} + p\sum_{k=1}^{p-2} H_k\,\frac{2^{k}}{k+1} \ (\mathrm{mod} p^2).$$

References

[1] J.W.L. Glaisher, On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers and their powers to modulus p^2 or p^3, Quart. J. Math. Oxford 31 (1900), 321 – 353.

[2] A. Granville, The square of the Fermat quotient, Integers: Electronic J. of Combinatorial Number Theory 4 (2004), #A22 (electronic)

[3] P. Ribenboim, 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag, New York, 1979.

[4] http://bernard.ronk.free.fr/Quotient_Fermat_V1.pdf

[5] http://bernard.ronk.free.fr/approche_elementaire_v8_3.pdf

[6] Z. W. Sun, Arithmetic theory of harmonic numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 415–428.